Lezione 5

Cenni di cosmologia
(parte I – il modello cosmologico standard)

Coordinate fisiche e comoventi

- Nei modelli cosmologici si utilizzano due tipi di sistemi di coordinate:
  - ***Coordinate fisiche:*** *il sistema di coordinate rimane fisso mentre lo spazio si espande attorno ad esso.*
  - ***Coordinate comoventi:*** *è un sistema che si espande con l'universo.*
- Consideriamo due galassie lontane, non legate gravitazionalmente: la loro distanza fisica, x, dipende dal tempo per cui possiamo scrivere

$$x \equiv x(t)$$

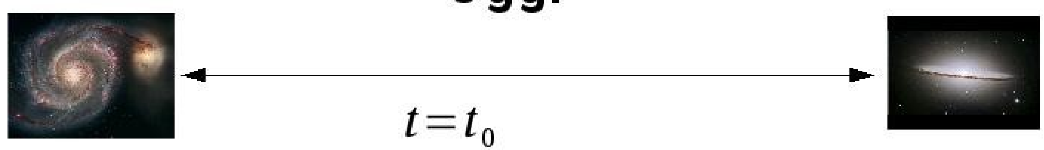
Mentre la distanza comovente, η, è indipendente dal tempo

- La trasformazione fra il sistema di coordinate fisiche e quelle comoventi possiamo scriverla come:

$$x(t) = a(t)\eta$$

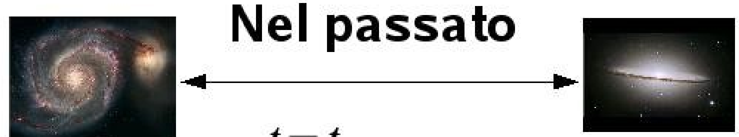
dove la funzione adimensionale a(t) è il cosiddetto **fattore di scala** e descrive l'espansione dell'universo nel tempo. Per definizione poniamo $a(t_{now}) = 1$

Oggi



$$t = t_0$$
$$\eta = \eta_0$$
$$x = a(t_0)\eta_0 \equiv \eta_0$$

Nel passato



$$t = t_1$$
$$\eta = \eta_0$$
$$x = a(t_1)\eta_0$$

Sintesi del modello cosmologico standard

- Dalle equazioni della relatività generale di Einstein è possibile determinare un'equazione dinamica per a(t)

(1) $$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k\,c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

(2) $$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + \frac{3\,p}{c^2})$$

dove *k* rappresenta la curvatura e $H = \dot{a}/a$ la velocità di espansione dell'Universo (per dimostrarlo partire da H = v/D e passare a coordinate comoventi)

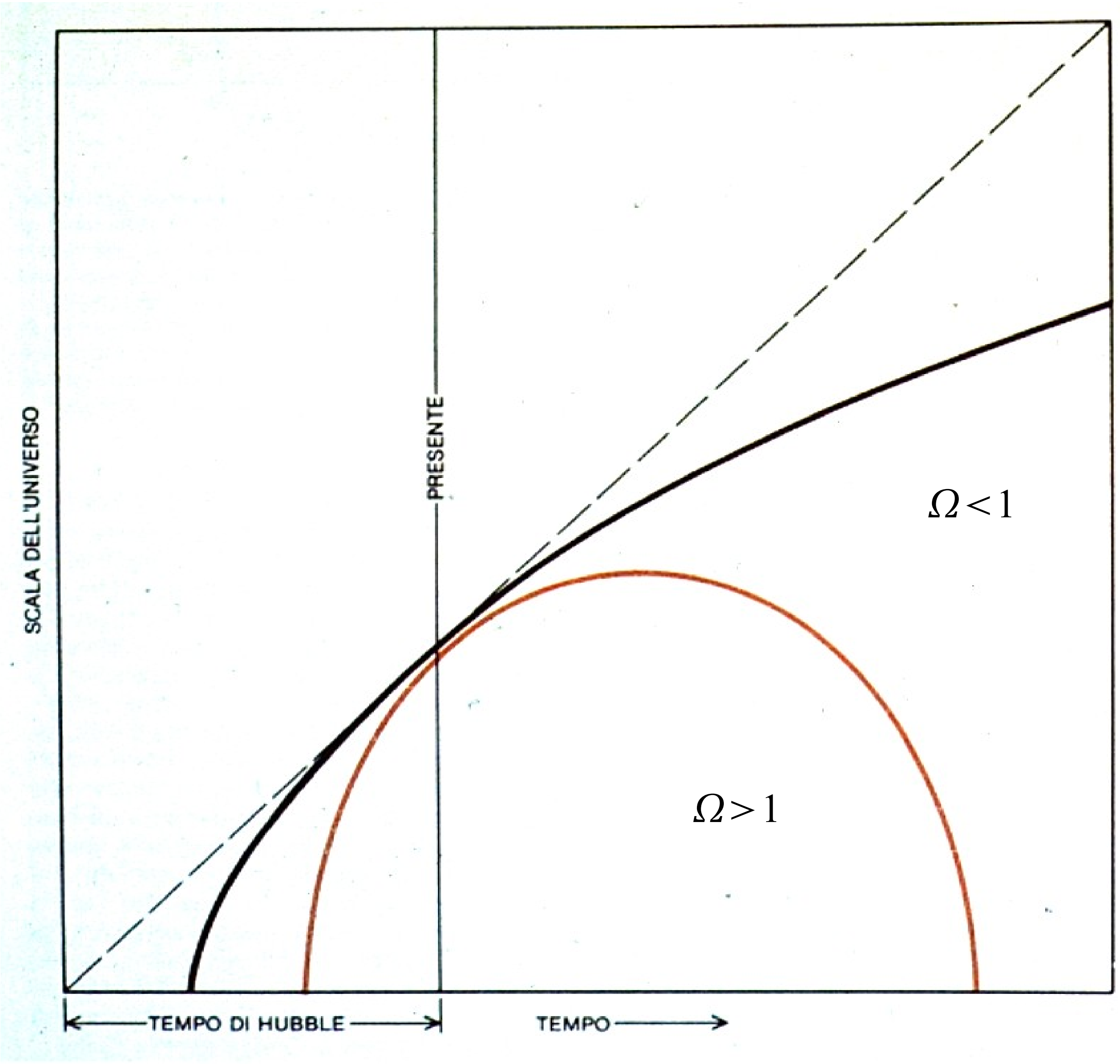
- Dall'equazione (1) possiamo ricavare:

$$\frac{k\,c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2\left(\frac{8\pi G}{3H^2}\rho - 1\right) \equiv H^2(\Omega - 1)$$

$$\boxed{\Omega = \rho/\rho_c \qquad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}}$$

Il termine Ω rappresenta il rapporto fra la densità dell'universo ed una densità “critica” ed il suo valore è legato alla geometria dell'Universo, in particolare alla curvatura *k*

$$\boxed{\Omega \lesseqqgtr 1 \Rightarrow k = -1, 0, 1}$$



La dinamica e la geometria dell'universo sono determinati dalla sua densità media

Soluzioni semplici delle equazioni di Friedmann

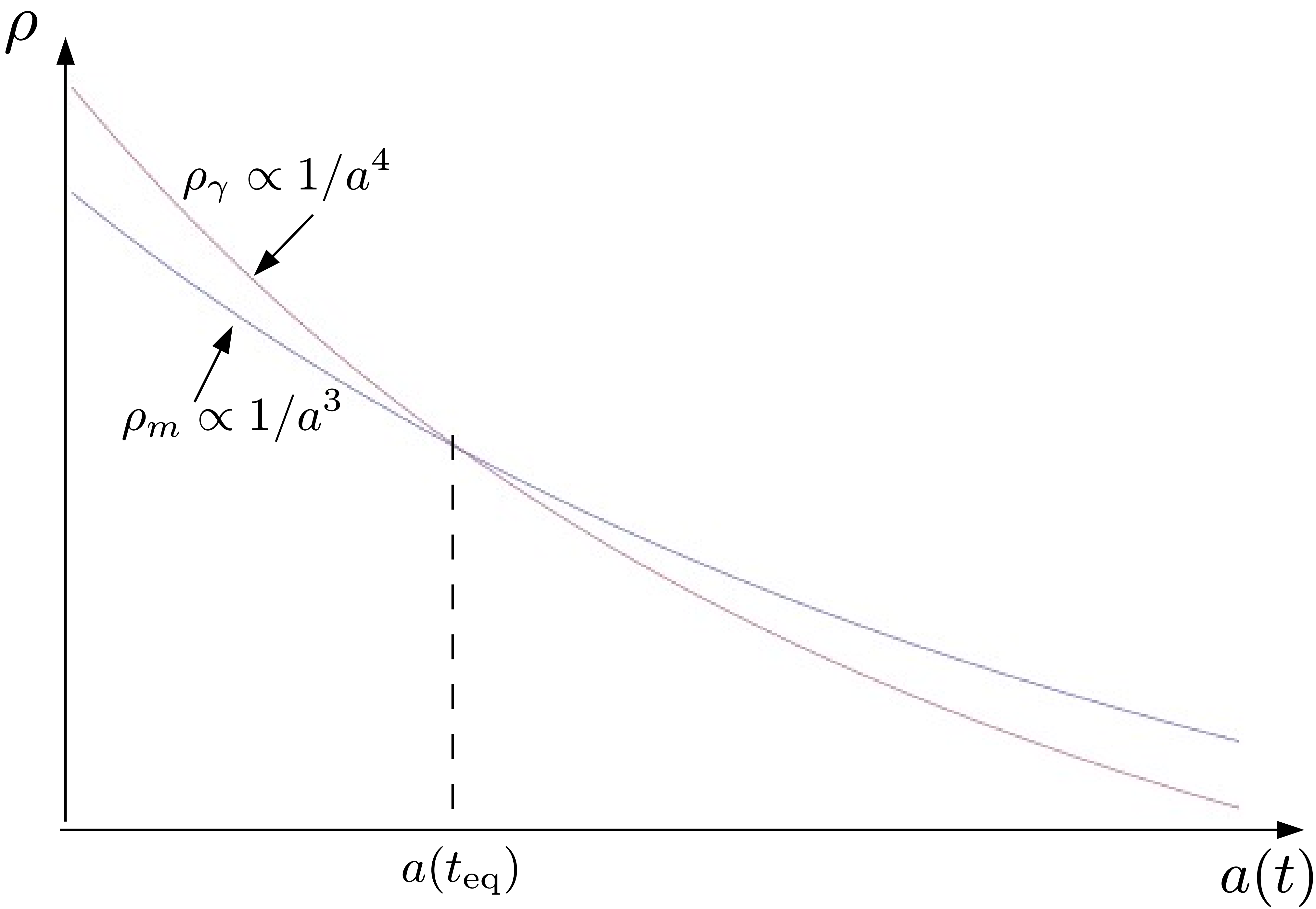
- Consideriamo l'energia determinata da due componenti: la densità di energia della materia (barionica + materia oscura) e della radiazione

$$\rho = \rho_m + \rho_\gamma$$

- È immediato rendersi conto che: $\rho_m(t) \propto 1/a(t)^3$ mentre $\rho_\gamma(t) \propto 1/a(t)^4$

  dove in questo caso abbiamo un fattore 1/a in più a causa dell'aumento di λ con l'espansione

  È chiaro quindi che esiste un tempo critico t_{eq} per cui si ha che $\rho_\gamma > \rho_m$ per $t < t_{eq}$ e $\rho_\gamma < \rho_m$ per $t > t_{eq}$



ρ
$\rho_\gamma \propto 1/a^4$
$\rho_m \propto 1/a^3$
$a(t_{\mathrm{eq}})$
$a(t)$

- Possiamo quindi trovare delle soluzioni alla prima equazione di Friedmann nel caso k = 0 (universo piatto) per i due casi $\rho_\gamma > \rho_m$ e $\rho_\gamma < \rho_m$

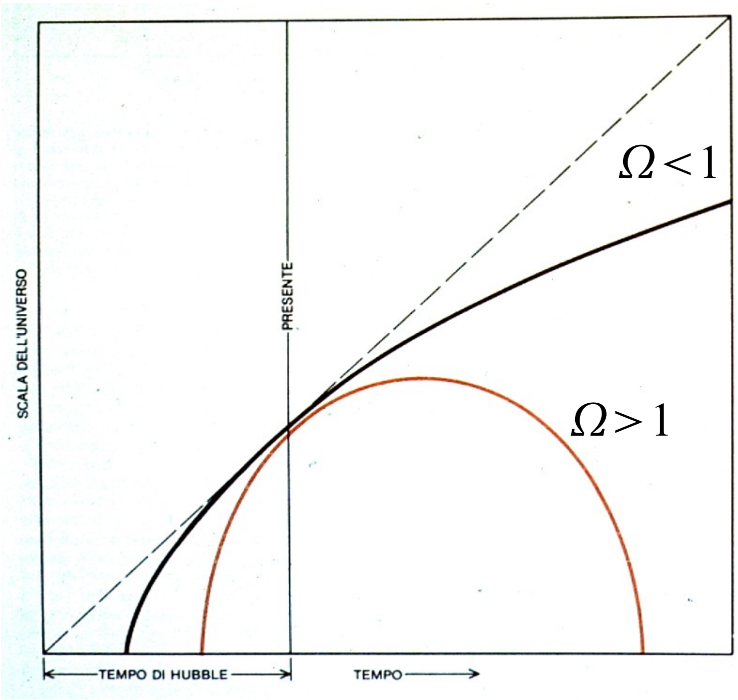
$$\boxed{\begin{aligned} a(t) &\propto t^{1/2}\ \text{per}\ \ t < t_{\text{eq}} \\ a(t) &\propto t^{2/3}\ \text{per}\ \ t > t_{\text{eq}} \end{aligned}}$$

- Consideriamo ora in modo qualitativo il caso in cui $k \neq 0$

Le equazioni che governano l'espansione sono:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{k\,c^2}{a(t)^2}$$

- Se analizziamo l'equazione nel caso di universo dominato dalla materia possiamo vedere che se k = -1 abbiamo un universo che si espande all'infinito e che tende asintoticamente ad una velocità di espansione costante
- Se k = +1 è altrettanto immediato osservare che esiste un tempo in cui H(t) = 0 e quindi l'espansione si ferma. Poiché rimane l'attrazione gravitazionale è inevitabile che l'universo ricollassi



La dinamica e la geometria dell'universo sono determinati dalla sua densità media

La distanza di luminosità per oggetti distanti

- Per distanze non cosmologiche la distanza di luminosità corrisponde alla distanza fisica dell'oggetto.

- Per oggetti a distanze cosmologiche dobbiamo tener conto dell'espansione dell'universo e quindi di due effetti:
  - *I fotoni perdono energia a causa dello 'stiramento' delle lunghezze d'onda*
  - *I fotoni arrivano meno frequentemente perché lo spazio si espande*

La distanza di luminosità per oggetti distanti

- Consideriamo un oggetto a distanza *z.* L'energia di ciascun fotone rilevato è:

$$E_{\rm obs} = hc/\lambda_{\rm obs}$$

- poiché $\lambda_{obs} = (1+z)\, \lambda_{em}$ si ha che l'energia dei fotoni nell'universo in espansione decresce come (1+*z*)

- In un universo in espansione, inoltre, le distanze sono dipendenti dal tempo e possiamo esprimerle mediante un fattore di scala *a*(*t*)

$$r \equiv r(t) = r_0 a(t)$$

La distanza di luminosità per oggetti distanti

- Consideriamo due fotoni emessi a breve distanza temporale da una galassia e calcoliamo i tempi di arrivo eguagliando le distanze percorse dai due fotoni

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{c\,dt}{a(t)} = \int_{t_e+dt_e}^{t_o+dt_o} \frac{c\,dt}{a(t)}$$

- che possiamo riscrivere come

$$\int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{c\,dt}{a(t)} + \cancel{\int_{t_e+dt_e}^{t_o} \frac{c\,dt}{a(t)}} = \cancel{\int_{t_e+dt_e}^{t_o} \frac{c\,dt}{a(t)}} + \int_{t_o}^{t_o+dt_o} \frac{c\,dt}{a(t)}$$

La distanza di luminosità per oggetti distanti

$$\int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{c\,dt}{a(t)} = \int_{t_o}^{t_o+dt_o} \frac{c\,dt}{a(t)} \Rightarrow \frac{dt_e}{a(t_e)} = \frac{dt_o}{a(t_o)}$$

$$\Rightarrow \frac{dt_e}{dt_o} = \frac{a(t_e)}{a(t_o)} = (1+z)^{-1}$$

il rapporto fra i flussi (emesso e ricevuto) è

$$\frac{F_o}{F_e} = \frac{dE_o}{dE_e}\frac{dt_e}{dt_o} = (1+z)^{-2}$$

La distanza di luminosità per oggetti distanti

$$d_L^2 = (L/4\pi F_o) = (L/4\pi F_e)(1+z)^2$$

$$\Rightarrow d_L = d_{\rm phys}(z)(1+z)$$

Problemi del modello cosmologico standard

- **Problema delle condizioni iniziali:** il modello non spiega quali siano le condizioni iniziali che hanno portato alle fluttuazioni di densità nell'universo primordiale
- **Problema della piattezza:** le osservazioni indicano un universo molto prossimo all'essere piatto. Nel modello cosmologico standard questo implicherebbe un estremo fine-tuning delle condizioni iniziali sulla curvatura.
- **Problema dell'orizzonte:** se consideriamo la distanza percorsa dalla luce prima del disaccoppiamento vediamo che le regioni causalmente connesse sulla superficie di ultimo scattering sono di dimensioni angolari (oggi) inferiori al grado. Questo contraddice l'estrema omogeneità e isotropia osservata nel fondo cosmico

Problema della piattezza

- Le più recenti evidenze sperimentali indicano un valore di Ω molto prossimo a 1 $(\Omega = 1.001 \pm 0.04)$
- Vediamo se questo valore è giustificabile sulla base del modello standard. Partiamo dall'equazione

$$\frac{k\,c^2}{a^2} = H^2(\Omega - 1)$$

e consideriamo un tempo sufficientemente remoto in cui $a(t) \propto t^{1/2}$. Considerando che $H(t) = \dot{a}/a$ si ottiene che $|\Omega(t) - 1| \propto t$

- Se k non è nullo allora Ω tende ad essere rapidamente molto diverso da 1.
- In altre parole per giustificare un valore molto prossimo a 1 bisogna richiedere o k identicamente nullo oppure una piattezza estrema dell'universo in tempi molto remoti

Problema dell'orizzonte

- L'estrema isotropia del fondo cosmico di microonde ci dice che l'universo primordiale deve essere stato in contatto causale su scale paragonabili a quelle dell'universo osservabile.
- Poiché per avere contatto causale fra due regioni dell'universo è necessario che venga scambiata informazione, e questa non può viaggiare a velocità superiore a quella della luce, calcoliamo qual è la distanza percorsa dalla luce nell'universo in espansione dal Big Bang fino al disaccoppiamento, ovvero a t ~ 380.000 anni:

$$d_{\rm dec} = \int_0^{t_{\rm eq}} \frac{c\,dt}{(t/t_0)^{1/2}} + \int_{t_{\rm eq}}^{t_{\rm dec}} \frac{c\,dt}{(t/t_0)^{2/3}} = c\,t_0\left[2\sqrt{t_{\rm eq}/t_0} - 3t_0^{-1/3}\left(t_{\rm eq}^{1/3} - t_{\rm dec}^{1/3}\right)\right].$$

- Analogamente possiamo calcolare le dimensioni dell'universo osservabile come

$$d_0 = \int_0^{t_0} \frac{c\,dt}{(t/t_0)^{1/2}} = 3\,c\,t_0$$

Problema dell'orizzonte

- Il rapporto $\theta_0 = d_{\rm dec}/d_0$ ci fornisce la scala angolare osservabile oggi sulla superficie di ultimo scattering al di sotto della quale ci aspettiamo isotropia nella radiazione cosmica di fondo, mentre al di fuori di questa scala ci aspettiamo anisotropia in quanto regioni su scale angolari maggiori di θ_0 non possono essere state in contatto causale prima del disaccoppiamento

- Utilizzando le migliori stime disponibili per t_{eq} (~1500 yr), t_{dec} (~380000 yr) e t_0 (~13.7 Gyr) si ottiene θ_0~1.5°, stima in contraddizione con l'isotropia a larga scala del fondo cosmico di microonde

Modello inflazionario (Guth 1981)

Periodo dell'evoluzione dell'universo durante il quale il fattore di scala subisce un'accelerazione

$$\mathrm{INFLAZIONE} \Leftrightarrow \ddot{a}(t) > 0$$

Consideriamo la seconda equazione di Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + \frac{3\,p}{c^2})$$

È immediato verificare che l'inflazione richiede l'esistenza di una pressione negativa

$$p < \frac{\rho\, c^2}{3}$$

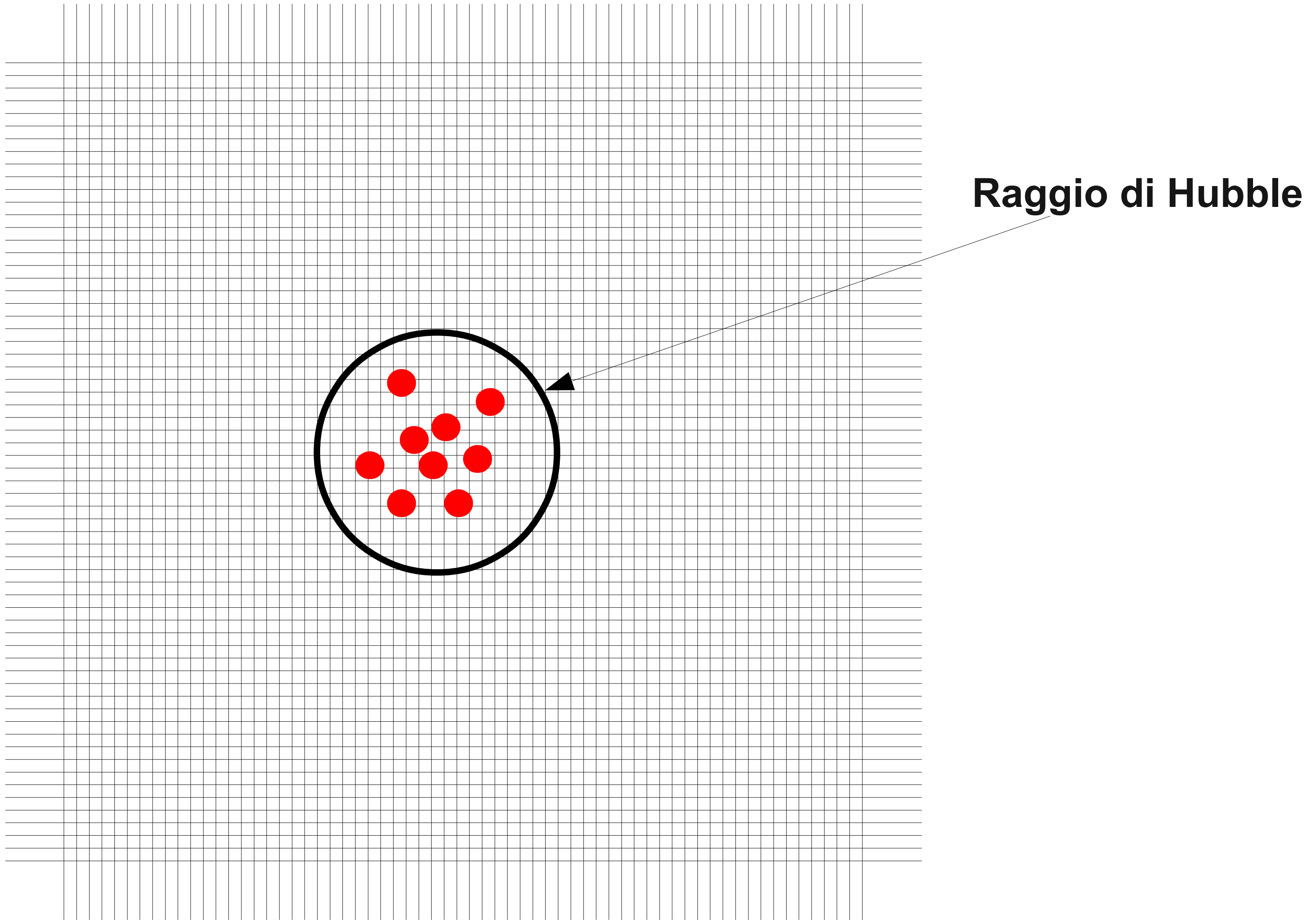
Modello inflazionario (Guth 1981)

- Un tale scenario è ipotizzabile considerando un universo in cui la densità di energia e, pertanto, H rimangono costanti nel tempo.

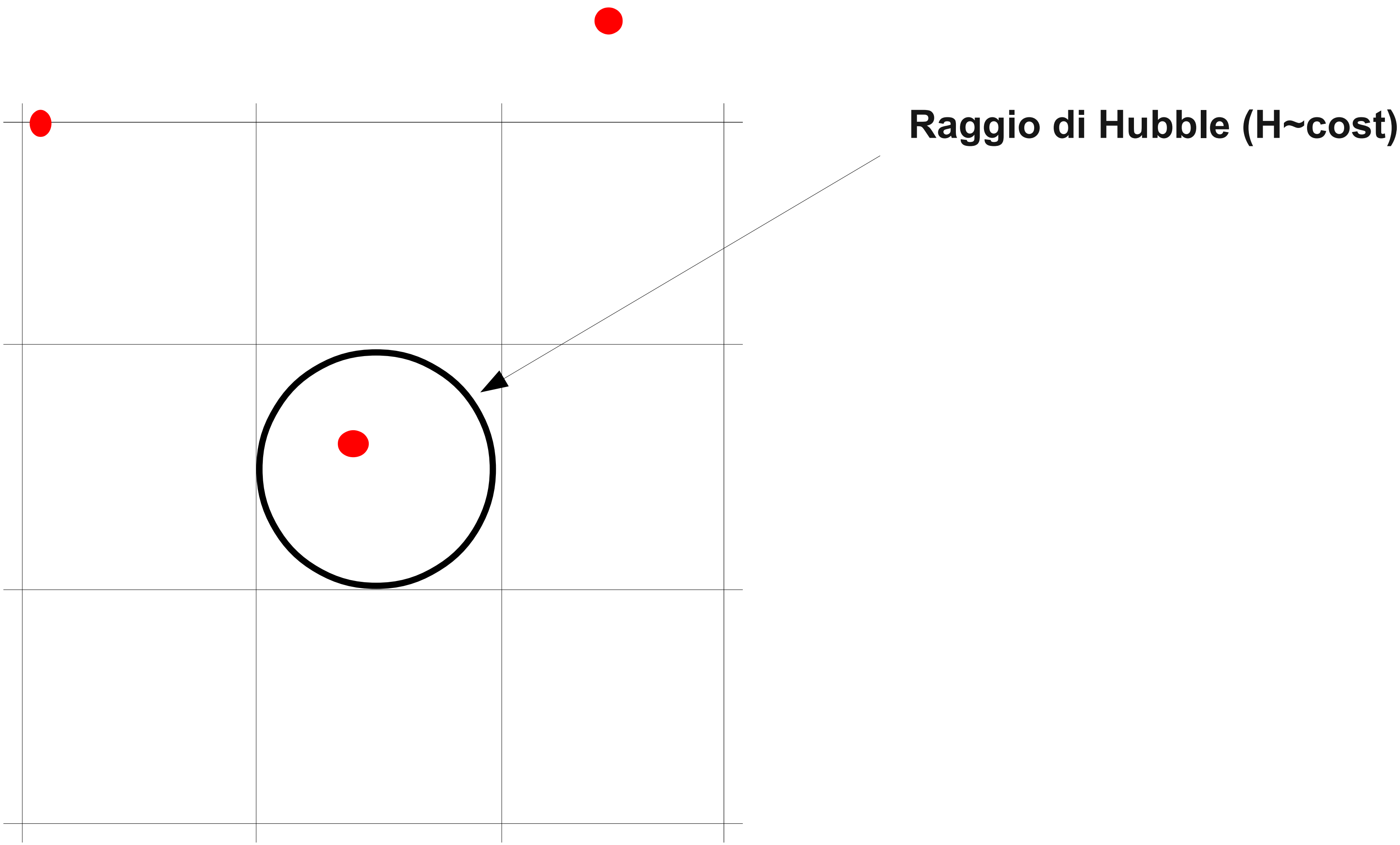
$$H = \dot{a}/a \equiv \text{costante} \Leftrightarrow a(t) \propto \exp(H\,t)$$

- dove è evidente che è soddisfatta la condizione $\ddot{a} > 0$. Dopo un certo periodo (dell'ordine di grandezza di t ~ 10^{-34} s) l'inflazione termina e l'energia viene convertita in materia convenzionale. A questo punto l'espansione prosegue come previsto dal modello standard.
- **Come l'inflazione risolve il problema dell'orizzonte.** L'inflazione è un meccanismo per il quale una regione inizialmente in contatto causale viene espansa a dimensioni tali da non esserlo più al termine del periodo inflattivo.
- Questo spiega il fatto che il nostro universo osservabile ci appaia omogeneo e isotropo anche su scale più grandi dell'orizzonte di Hubble; prima dell'inflazione tutta questa regione di universo sarebbe stata compressa in una piccolissima regione in cui la termalizzazione era possibile.

Prima dell'inflazione



Dopo l'inflazione



Nell'esempio l'espansione è di un fattore 20. Durante l'inflazione l'universo si è espanso di un fattore ~ e^{60}

Modello inflazionario (Guth 1981)

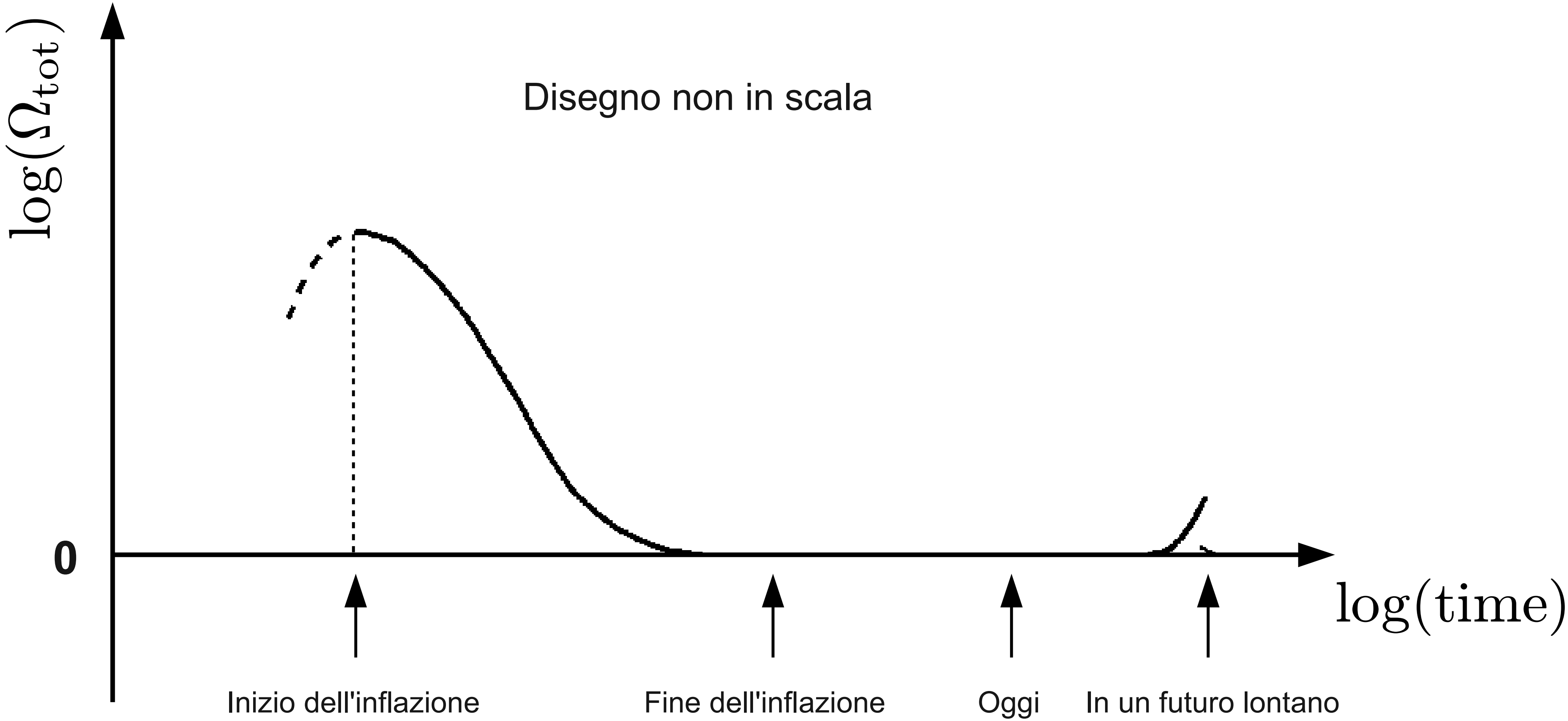
- **Come l'inflazione risolve il problema della piattezza.** Dalle equazioni di Friedmann abbiamo che:

$$|\Omega - 1| = kc^2/(aH)^2$$

- Considerando $a(t) \propto \exp(H\,t)$ abbiamo che

$$|\Omega - 1| = \frac{kc^2}{H^2} e^{-2Ht}$$

- L'equazione ci dice che l'universo si espande al punto di dimventare praticamente piatto. Terminata l'inflazione la curvatura riprende ad aumentare (in modulo) proporzionalmente a t, ma il tempo trascorso dal termine dell'inflazione ad oggi non è stato sufficiente a riportare Ω a valori significativamente diversi da 1



Un possibile scenario evolutivo per il parametro Ω. Non sappiamo cosa sia avvenuto prima dell'inflazione (linea tratteggiata). L'inflazione fa decrescere il logaritmo di Ω fino a valori molto prossimi allo 0 (cioè $\Omega \rightarrow 1$. Al termine dell'inflazione Ω è così vicino a 1 che tutto il tempo trascorso dal termine dell'inflazione ad oggi non è stato sufficiente a far deviare questo valore da 1 in modo significativo.

Modello inflazionario (Guth 1981)

- **Quanta inflazione è necessaria per giustificare il livello di piattezza osservato oggi?** Consideriamo i seguenti dati:
  - *Termine dell'inflazione:* $t_{\text{infl}} \sim 10^{-34}$ *s*
  - *Livello di piattezza osservato oggi:* $|\Omega_0 - 1| < 0.1$

- Supponiamo un'evoluzione dominata dalla radiazione: $|\Omega(t) - 1| \propto t$

Abbiamo, pertanto

$$|\Omega(t_{\text{infl}}) - 1| = |\Omega_0 - 1| \frac{t_{\text{infl}}}{t_0} = 0.1 \frac{10^{-34}\,\text{s}}{4 \times 10^{17}\,\text{s}} \leq 3 \times 10^{-53}$$

- Poiché $|\Omega(t) - 1| \propto a^2$ si ha che durante l'inflazione il fattore di scala deve aumentare di un fattore dell'ordine $10^{27} \sim e^{62}$